

# I LIMITI

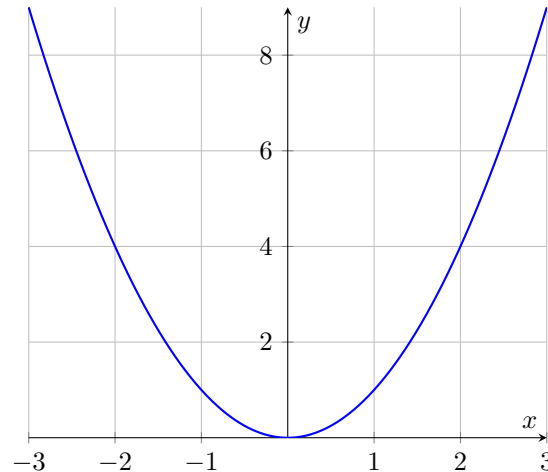
Edoardo Lo Iacono

## Indice

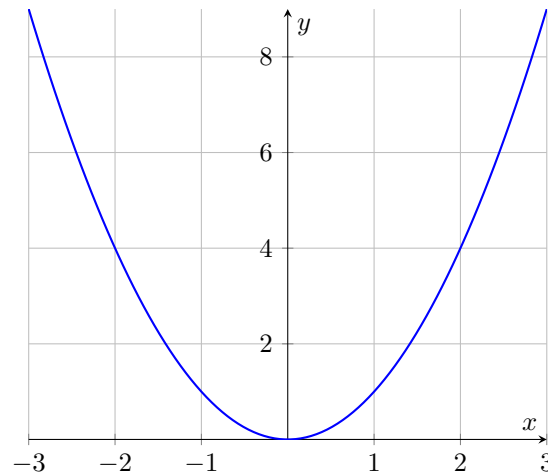
<b>1</b>	<b>Concetto intuitivo di limite</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>La Definizione Formale di Limite</b>	<b>4</b>
2.1	L'intorno . . . . .	4
2.2	Definizione pratica . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Forme indeterminate</b>	<b>4</b>
3.1	Si annulla il denominatore . . . . .	4
3.2	Caso $\frac{0}{0}$ . . . . .	5
3.3	Caso $\infty - \infty$ . . . . .	6
3.4	Caso $\frac{\infty}{\infty}$ . . . . .	7
<b>4</b>	<b>Analisi Grafica dei Limiti</b>	<b>7</b>
<b>5</b>	<b>Gli asintoti</b>	<b>8</b>
5.1	Asintoti Verticali . . . . .	8
5.2	Asintoti Orizzontali . . . . .	8
5.3	Asintoti Obliqui . . . . .	8
<b>6</b>	<b>Discontinuità</b>	<b>8</b>
6.1	Discontinuità di I specie . . . . .	8
6.2	Discontinuità di II specie . . . . .	9
6.3	Discontinuità di III specie . . . . .	9

# 1 Concetto intuitivo di limite

Prima di fornire in maniera precisa una definizione di limite cerchiamo di comprenderlo in maniera più intuitiva e pragmatica provando anche a calcolare dei casi standard. Prendiamo ora in considerazione il grafico della parabola con funzione  $y = x^2$

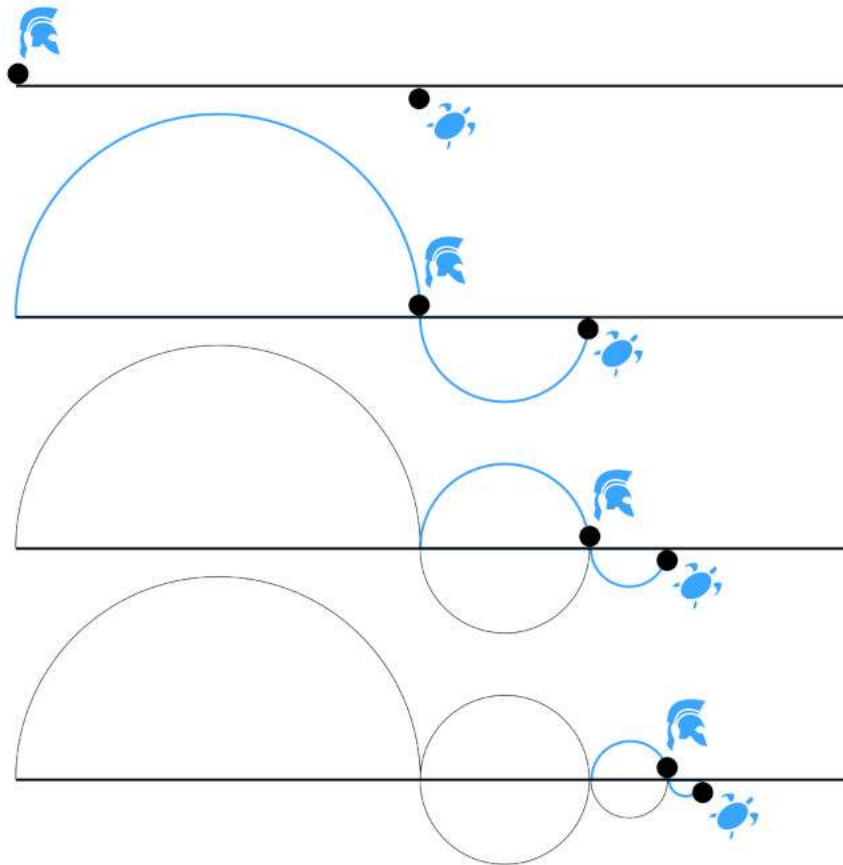


Determiniamo il limite  $\lim_{x \rightarrow 2} x^2$ , in altre parole cerchiamo di capire a che valore tende  $y (x^2)$  quando la nostra  $x$  è tendente a 2. Possiamo notare, anche dal punto di vista grafico come in questo caso  $x^2$  sia tendente a 4 quando  $x$  tende a 2.



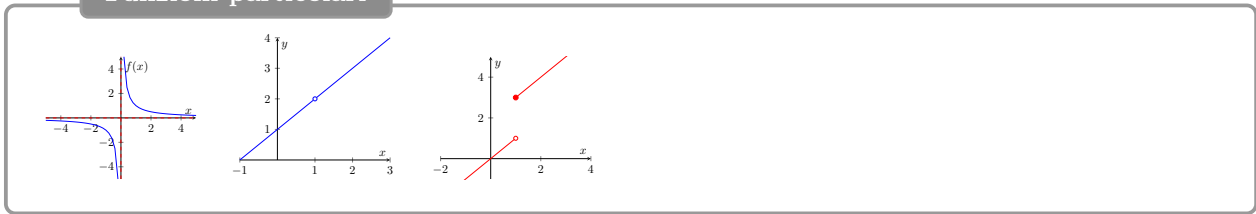
Un'importante elemento che viene introdotto nello studio matematico grazie ai limiti è il concetto di **tendenza** e di **infinito**. Due concetti particolarmente interessanti non solo in prospettiva matematica ma anche filosofica e generale, è importante comprenderli bene per poter avanzare con la spiegazione dei limiti.

Fino ad ora nella matematica ci siamo sempre occupati di punti "fermi" e statici, i limiti introducono invece il concetto di tendenza e di avvicinamento indefinito, non è più importante quello che accade esattamente in un punto ma quanto accade mentre ci avviciniamo. Potremmo usare come esempio di tendenza il paradosso che il filosofo *Zenone* ha ideato mettendo a confronto l'eroe Greco Achille con una tartaruga. Nel paradosso Achille non può raggiungere la tartaruga andando a dimezzare sempre il suo raggio di movimento, seppure questo paradosso avesse il fine di confermare la teoria di Parmenide sull'impossibilità del movimento ontologico, mette chiaramente in luce il concetto di tendenza, Achille tende alla tartaruga pur non raggiungendola mai.



Potremmo però a questo punto, tenendo in considerazione l'esempio visto credere che per trovare il limite di una funzione sia sufficiente sostituire la  $x$  all'interno della nostra funzione. Questa metodologia ci porta però numerosi problemi quando sono presenti:

- Asintoti
- Punti esclusi
- Salti



## 2 La Definizione Formale di Limite

Il concetto di limite rappresenta il pilastro fondamentale dell'analisi matematica. Per definirlo in modo rigoroso, è necessario utilizzare il concetto di **intorno**, che permette di unificare i casi finiti e infiniti in un'unica formulazione teorica.

### 2.1 L'intorno

Un intorno è un insieme di punti che "circondano" un determinato valore. La loro forma dipende dalla natura del punto considerato:

- **Intorno di un numero reale  $x_0$ :** È un intervallo aperto  $I = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ , che comprende tutti i punti la cui distanza da  $x_0$  è minore di  $\delta$ .
- **Intorno di  $+\infty$ :** È una semiretta aperta del tipo  $(M, +\infty)$ , formata da tutti i numeri reali maggiori di un valore  $M$  fissato.
- **Intorno di  $-\infty$ :** È una semiretta aperta del tipo  $(-\infty, M)$ , formata da tutti i numeri reali minori di un valore  $M$  fissato.

### 2.2 Definizione pratica

Sia  $f(x)$  una funzione definita in un insieme  $D$  e sia  $x_0$  un punto di accumulazione per  $D$ . Si dice che:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

se, comunque si scelga un **intorno  $V$  di  $L$** , è possibile trovare un **intorno  $U$  di  $x_0$**  tale che, per ogni  $x \in U \cap D$  (con  $x \neq x_0$ ), si abbia che  $f(x) \in V$ .

Per comprendere come questa definizione consideriamo il caso  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ . Il procedimento segue tre passaggi logici:

1. **Fissare una quota:** Si sceglie un numero  $M > 0$  grande a piacere (rappresentante l'intorno di  $+\infty$  sull'asse  $y$ ).
2. **Individuare una soglia:** Deve esistere un valore  $K > 0$  (rappresentante l'intorno di  $+\infty$  sull'asse  $x$ ).
3. **Verifica:** Se per ogni  $x > K$  la funzione  $f(x)$  rimane stabilmente sopra la quota  $M$ , il limite è verificato.

## 3 Forme indeterminate

### 3.1 Si annulla il denominatore

Nei casi in cui la funzione presenti un asintoto, sostituendo  $x$  nella funzione essa si annullerà in quanto non andrà a rispettare le condizioni di esistenza imposte dal dominio. Prendiamo il caso  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{x-2}$ . Sostituendo alla funzione 2 avremo come risultato  $\frac{2}{0}$  il quale sappiamo essere impossibile.

In questo caso quello che dobbiamo fare è **considerare separatamente** il valore di  $y$  quando  $x$  tende ad un valore di poco precedente a due e di poco successivo a due, considereremo dunque i seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x}{x-2} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x}{x-2} \quad (2)$$

I quali si risolvono rispettivamente:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x}{x-2} = \frac{2^+}{2^+ - 2} = \frac{2^+}{0^+} = +\infty \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x}{x-2} = \frac{2^-}{2^- - 2} = \frac{2^-}{0^-} = -\infty \quad (4)$$

I segni

E' molto importante, ond'evitare errori tenere bene in considerazione l'uso che facciamo dei segni e come essi cambino in base al contesto, di seguito un ripasso ovvio ma importante

$$\frac{x}{0^+} = +\infty \quad (5)$$

$$\frac{x}{0^-} = -\infty \quad (6)$$

$$\frac{-x}{0^+} = -\infty \quad (7)$$

$$\frac{-x}{0^-} = +\infty \quad (8)$$

$$\frac{x}{(0^\pm)^2} = +\infty \quad (9)$$

$$\ln(0^+) \rightarrow -\infty \quad (10)$$

### 3.2 Caso $\frac{0}{0}$

Nel caso in cui sostituendo nella funzione sia numeratore che denominatore si vadano ad annullare è necessario **scomporre e semplificare** numeratore e denominatore. Prendiamo come esempio:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - x} = \frac{0}{0} \quad (11)$$

notiamo come risulti indeterminato in quanto sostituendo abbiamo  $\frac{0}{0}$ , per risolvere questo limite dobbiamo scomporre i due membri della frazione.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(x-1)}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)}{x} = \frac{2}{1} = 2 \quad (12)$$

### I prodotti notevoli

Sebbene tutti questi passaggi dovrebbero essere ora più che banali ed all'ordine del giorno, facciamo di seguito un breve ripasso dei più importanti prodotti notevoli.

- **Quadrato di un binomio:**  $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
- **Somma per differenza (Differenza di quadrati):**  $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
- **Cubo di un binomio:**  $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$
- **Quadrato di un trinomio:**  $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$
- **Somma e differenza di cubi:**

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

### Scomposizione del Trinomio

Rivediamo anche il metodo generale di scomposizione di un trinomio di secondo grado

#### 2. Metodo Generale ( $ax^2 + bx + c$ )

Si risolve  $ax^2 + bx + c = 0$  con  $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta(b^2 - 4ac)}}{2a}$ .

#### Analisi del $\Delta$ :

$\Delta > 0 \rightarrow 2$  radici reali

$\Delta < 0 \rightarrow$  **Non scomponibile** (irriducibile)

### 3.3 Caso $\infty - \infty$

Le funzioni in cui può occorrere questa casistica sono solitamente funzioni polinomiali, per risolverle è necessario trovare il termine con la potenza più alta, ricordandosi di considerare anche il segno e fare il limite solamente su quel valore, facciamo un esempio:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 3) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \quad (13)$$

questo procedimento ovviamente non avviene per magia ma è la formalizzazione di un procedimento più articolato che consiste nell'isolare il termine maggiore, in questo modo:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 3) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \frac{3}{x^2}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \frac{3}{x}\right) = +\infty(1 - 0) = +\infty \quad (14)$$

questa tecnica non è però utilizzabile in ogni caso, sorgono infatti dei problemi quando lavoriamo con le radici. In tali casi quello che dobbiamo fare è **razionalizzare il numeratore**. Non molliamo gli studi e vediamo subito un esempio

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x-3} - \sqrt{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x-3} - \sqrt{x}) \frac{\sqrt{x-3} + \sqrt{x}}{\sqrt{x-3} + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-3) - x}{\sqrt{x-3} + \sqrt{x}} = \frac{-3}{+\infty} = 0 \quad (15)$$

## Proprietà dell'Infinito nei Limiti

Nelle operazioni con i limiti, l'infinito si comporta seguendo regole specifiche. Ricorda: l'infinito non è un numero, ma un'indicazione di tendenza.

### Operazioni Fondamentali:

- **Divisione:**  $\frac{k}{\pm\infty} = 0$  (con  $k \in \mathbb{R}$ )
- **Somma:**  $+\infty + k = +\infty$  e  $+\infty + \infty = +\infty$
- **Prodotto:**  $\begin{cases} +\infty \cdot (+\infty) = +\infty \\ +\infty \cdot (-\infty) = -\infty \end{cases}$
- **Potenze e Radici:**  $\sqrt[n]{+\infty} = +\infty$  e  $(+\infty)^n = +\infty$
- **Argomento Infinito:**  $\ln(+\infty) \rightarrow +\infty$
- **Infinito all'esponente:**  $a^{+\infty} = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ 0 & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$

### 3.4 Caso $\frac{\infty}{\infty}$

In questo caso, come in quello precedente dobbiamo considerare il grado massimo di numeratore e di denominatore, in particolare possiamo ricondurre questa risoluzione a tre casistiche:

- Il grado massimo si trova a numeratore, In questo caso consideriamo solamente questo elemento (con il suo segno) ed andiamo a sostituirgli il valore a cui tende  $x$ . quindi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \quad (16)$$

- Quando il grado del denominatore è maggiore avremo un valore più alto che conduce quindi sempre a 0

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^3+2} = 0 \quad (17)$$

- Quando a numeratore e denominatore si eguaglia il grado massimo dobbiamo dividere i coefficienti di grado massimo, andando in parole semplici a tenere in considerazione solamente il numero che rimane senza  $x$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3+5x-4}{3x^3+x^2+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3(1+\frac{5x}{x^3}-\frac{4}{x^3})}{x^3(3+\frac{x^2}{x^3}+\frac{1}{x^3})} = \frac{1}{3} \quad (18)$$

## 4 Analisi Grafica dei Limiti

L'analisi dei limiti a partire dal grafico di una funzione si basa sull'osservazione del comportamento delle ordinate ( $y$ ) al tendere delle ascisse ( $x$ ) verso un valore specifico o verso l'infinito.

- **Limiti al finito ( $x \rightarrow x_0$ ):** Si osserva a quale quota  $y$  tende la curva avvicinandosi a  $x_0$  da destra ( $x_0^+$ ) e da sinistra ( $x_0^-$ ). Se i due valori sono uguali, il limite esiste. Eventuali "salti" o "punti vuoti" indicano discontinuità.
- **Asintoti Verticali:** Se avvicinandosi a  $x_0$  la curva sale o scende, si ha un limite infinito:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$ .

- **Limiti all'infinito** ( $x \rightarrow \pm\infty$ ): Si segue l'andamento della curva all'estrema destra o sinistra del piano.
  - Se la curva si appiattisce su una retta orizzontale, il limite è un valore finito  $L$  (asintoto orizzontale).
  - Se la curva continua a salire o scendere, il limite è  $\pm\infty$ .

## 5 Gli asintoti

Ora che abbiamo visto cosa sono i limiti ed abbiamo considerato le loro caratteristiche particolari possiamo passare allo studio degli asintoti. Gli asintoti, come detto all'inizio del documento sono quelle rette a cui la nostra funzione tende senza che vengano mai "toccate". Possiamo dividerli in tre categorie principali con le loro rispettive condizioni:

### 5.1 Asintoti Verticali

Si trovano solitamente nei punti dove la funzione non è definita. Li troviamo quando calcolando il limite per  $x$  che tende a un valore finito  $x_0$  otteniamo infinito.

**Condizione:**  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$

### 5.2 Asintoti Orizzontali

Troviamo questi asintoti quando un limite con  $x$  tendente a  $\pm\infty$  va ad "appiattirsi" su un valore finito.

**Condizione:**  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = L$  (con  $L$  numero finito)

### 5.3 Asintoti Obliqui

Quando abbiamo un limite con  $x$  tendente ad  $\infty$  uguale ad  $\infty$  siamo in corrispondenza di un asintoto obliquo il quale calcoliamo mediante una retta del tipo  $y = mx + q$ .

Per trovarla servono due passaggi:

1. **Trovare m:**  $m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$
2. **Trovare q:**  $q = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - mx]$

Se entrambi i limiti danno un valore finito (e  $m \neq 0$ ), la retta  $y = mx + q$  è il nostro asintoto obliquo.

## 6 Discontinuità

I punti di discontinuità sono semplicemente quei punti in cui la nostra funzione  $f(x)$  non è continua. Possiamo identificare 3 diverse categorie di punti di discontinuità in base alla condizione, vediamo di seguito.

### 6.1 Discontinuità di I specie

I punti di discontinuità di prima specie si hanno quando il limite destro è **diverso** da quello sinistro ed entrambi i limiti sono **finiti**, cioè:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l_1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l_2 \quad \text{con} \quad l_1 \neq l_2 \quad (19)$$

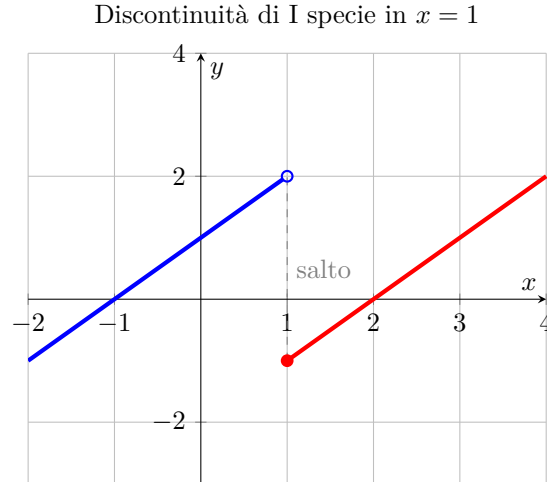
In questo caso il punto di discontinuità prende il nome di **salto** e si calcola come:  $|l_2 - l_1|$ .

Esempio:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x < 1 \\ x - 2 & \text{se } x \geq 1 \end{cases} \quad (20)$$

Verifichiamo la discontinuità nel punto  $x_0 = 1$ :

1. **Limite sinistro:**  $\lim_{x \rightarrow 1^-} (x + 1) = 1 + 1 = 2$
2. **Limite destro:**  $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x - 2) = 1 - 2 = -1$
3. **Calcolo del salto:** Poiché  $2 \neq -1$ , la funzione presenta un salto di ampiezza  $|-1 - 2| = 3$  nel punto  $x = 1$ .



## 6.2 Discontinuità di II specie

Si ha un punto di discontinuità di II specie quando **almeno** uno dei due limiti è **infinito**, quindi:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \pm\infty \vee \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \pm\infty \quad (21)$$

Consideriamo la funzione:

$$f(x) = \frac{1}{x - 2} \quad (22)$$

Verifichiamo la discontinuità nel punto  $x_0 = 2$ :

- **Limite sinistro:**  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty$
- **Limite destro:**  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty$

## 6.3 Discontinuità di III specie

Un punto  $x_0$  si dice di **terza specie** quando esiste finito il limite della funzione per  $x \rightarrow x_0$ , ma tale valore è diverso dal valore della funzione nel punto, oppure la funzione non è definita in quel punto. Quindi:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \quad \text{con } l \in \mathbb{R} \quad (23)$$

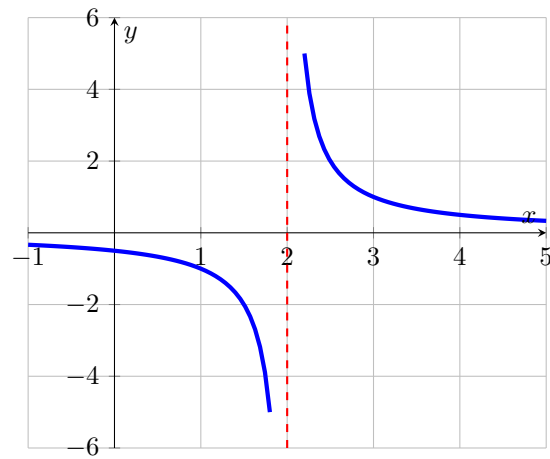
ma si verifica che  $f(x_0) \neq l$  oppure  $x_0 \notin \text{Dominio}$ . Si chiama "eliminabile" perché basterebbe ridefinire il valore di  $f(x_0)$  per rendere la funzione continua.

Consideriamo la funzione:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} \quad (24)$$

Il dominio della funzione è  $D : x \neq 1$ . Analizziamo il comportamento nel punto  $x_0 = 1$ :

Discontinuità di II specie in  $x = 2$



1. **Calcolo del limite:**  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2$
2. **Conclusione:** Il limite esiste ed è pari a 2, ma la funzione non esiste in  $x = 1$ . C'è un "buco" nel grafico.

Discontinuità di III specie in  $x = 1$

