Appunti derivate

Di Edoardo Lo Iacono

Indice

1 Definizione della derivata

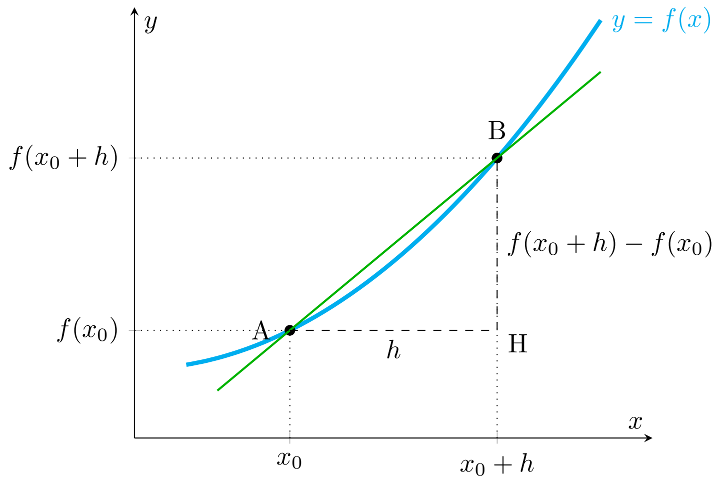

Figura 1: Significato geometrico del rapporto incrementale.

Definizioni

Sia $y = f(x)$ una funzione continua in x_0.

- h: l'incremento subito dalla variabile indipendente x.
- $f(x_0 + h) - f(x_0)$: è l'incremento subito dalla funzione.
- $\dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$: si chiama **rapporto incrementale**.

Dal punto di vista geometrico, il rapporto incrementale è il **coefficiente angolare** della retta passante per i punti $A(x_0, f(x_0))$ e $B(x_0 + h, f(x_0 + h))$.

La Derivata

Si definisce **derivata** di $y = f(x)$ in x_0 (e si indica con $f'(x_0)$) il limite per h che tende a zero del rapporto incrementale, se questo limite esiste ed è finito:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{1}$$

Dal punto di vista geometrico, la derivata di una funzione in un punto è il **coefficiente angolare della retta tangente** alla funzione in quel punto.

Vediamo meglio questa definizione considerando alcuni esempi:

Esempio 1

Calcola la derivata di $y = x^2$ in $x_0 = 1$.

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(1 + h)^2 - (1)^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1+2h+h^2-1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(2+h)}{h} = 2$$

Il valore 2 rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente a $y = x^2$ in $x = 1$.

Esempio 2

Calcola la derivata di $y = 3x - 1$ in $x_0 = -2$.

$$\begin{aligned} f'(-2) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{[3(-2+h)-1] - [3(-2)-1]}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-6+3h-1-(-7)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-7+3h+7}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{3h}{h} = 3 \end{aligned}$$

Da ricordare

Prima di proseguire mettiamo di seguito le principali formule da ricordare per una buona riuscita degli esercizi!

- **Rapporto incrementale:** $\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = m$ con $A(x_0, f(x_0))$ e $B(x_0+h, f(x_0+h))$
- **Derivata della funzione** $y = f(x)$ **in** x_0**:** $f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ se il limite esiste ed è finito
- **Somma per differenza:** $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

2 Regole di derivazione

Per iniziare ad analizzare le varie regole di derivazione poniamo ora di voler calcolare la derivata di $y = K$ in cui k rappresenta una costante in $x_0 = x$, procederemo quindi come in precedenza nel seguente modo:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{k-k}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0 \tag{2}$$

Possiamo quindi capire facilmente come la derivata di una qualsiasi costante abbia sempre valore 0.

Sempre per procedere in maniera empirica vediamo ora un'altro esempio:

Calcoliamo ora la derivata di $y = x$ in $x_0 = x$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h} = 1 \tag{3}$$

Vediamo dunque come la derivata di x equivalga a 0, vediamo ancora un paio di esempi per poi iniziare a definire in maniera più rigorosa le prime regole di derivazione.

Prendiamo ora in esame il seguente esercizio: calcoliamo la derivata di $y = x^2$ con $x_0 = x$:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2h + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(2x+h)}{h} = 2x \tag{4}$$

Abbiamo quindi visto il procedimento per fare la dimostrazione, di seguito elenchiamo le principali regole (non tutte viste negli esempi, ma puoi tranquillamente farteli e verificarli o prenderlo come un ipse dixit).

Da ricordare

Principali regole

- $D[K] = 0$
- $D[x] = 1$
- $D[x^n] = nx^{n-1}$
- $D[\frac{1}{x}] = -\frac{1}{x^2}$ (Caso particolare del punto 3)
- $D[\sqrt{x}] = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ (caso particolare del punto 3)
- $D[e^x]$ =e^x
- D[senx] =cosx
- D[cosx] =-senx
- D[arcsenx] =1$\frac{}{\sqrt{1-x^2}}$
- $D[tgx] = \frac{1}{cos^2x}$
- $D[tgx] = tg^2x + 1$
- D[arccosx] =-1$\frac{}{\sqrt{1-x^2}}$
- D[arctgx] =1$\frac{}{1+x^2}$

Per completezza vediamo di seguito anche i casi più particolari.

3 Derivazione delle funzioni elementari

3.1 Derivata della funzione esponenziale

Applicando la definizione di derivata tramite il limite del rapporto incrementale per la funzione $f(x) = e^x$:

$$f'(e^x) = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^x \cdot e^h - e^x}{h} = \lim_{h\to 0} e^x \left(\frac{e^h - 1}{h}\right) \tag{5}$$

Sfruttando il limite notevole dell'esponenziale, si ottiene:

$$D[e^x] = e^x \tag{6}$$

3.2 Derivata della funzione logaritmica

Per la funzione $f(x) = \ln x$, il calcolo si basa sulle proprietà dei logaritmi:

$$f'(\ln x) = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{h} \tag{7}$$

Il risultato del limite porta alla formula:

$$D[\ln x] = \frac{1}{x} \tag{8}$$

Da ricordare

Formule trigonometriche e limiti notevoli

Limiti Notevoli:

- $\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$ | $\lim_{h\to 0} \frac{1-\cos h}{h} = 0$
- $\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$ | $\lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$

Trigonometria:

- $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$
- $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

3.3 Derivata delle funzioni goniometriche

Funzione Seno: Utilizzando la formula di addizione del seno nel rapporto incrementale:

$$f'(\sin x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin x\cos h + \cos x\sin h - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0}\left[\sin x\frac{(\cos h - 1)}{h} + \cos x\frac{\sin h}{h}\right] \tag{9}$$

Applicando i limiti notevoli, otteniamo: $D[\sin x] = \cos x$.

Funzione Coseno: Sviluppando il rapporto incrementale con la formula di addizione del coseno:

$$f'(\cos x) = \lim_{h\to 0} \frac{\cos x\cos h - \sin x\sin h - \cos x}{h} = \lim_{h\to 0}\left[\cos x\frac{(\cos h - 1)}{h} - \sin x\frac{\sin h}{h}\right] \tag{10}$$

Il calcolo finale produce: $D[\cos x] = -\sin x$.

4 Teoremi delle derivate

- $D[Kf(x)] = Kf'(x)$

  La derivata di una costante per una funzione è la costante per la derivata della funzione, quindi $y = kf(x), y' = kf'(x)$

  esempio: $y = 4x^2 = 4 * 2x$

  dimostrazione: $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{kf(x+h)-kf(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{k[f(x+h)-f(x)]}{h} = kf'(x)$
- $D[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x)$
- $D[f(x)g(x)] = f'(x)g'(x) + f(x)g'(x)$
- $D[\frac{f(x)}{g(x)}] = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$
- $D[f(x)]^n = n[f(x)]^{n-1}f'(x)$